Τυπολόγιο Αλγεβρική τοπολογία ΙΙ
Εαρινό εξάμηνο 2004-5

Σωτήριος Δ. Χασάπης
Μαθηματικός

8 Ιουνίου, 2006

1 Ομολογία

1.1 Δ-συμπλέγματα

Ορισμός 1.1 .

n-simplex είναι η κυρτή θήκη ενός συνόλου n+1 σημείων του $\mathbb{R}^m$, τα οποία δεν βρίσκονται στον ίδιο αφινικό γραμμικό υπόχωρο διάστασης $n-1$.Γράφουμε ένα n-simplex ως : $\sigma^n = [v_0, v_1, ..., v_n]$.

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.2 .

Δηλαδή, έστω $\nu_0, \nu_1, .., \nu_\nu \in \mathbb{R}^m$ τέτοια, ώστε τα $v_0 - v_1, v_0 - v_2, ..., v_0 - v_n$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε : $n - simplex : \sigma = \{\sum_{i=0}^n \lambda_\iota v_i : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \forall \ i = 0, .., n\}$

Ορισμός 1.3 .

Standard n-simplex ονομάζουμε το σύνολο των σημείων :

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1, \ t_i \geq 0, \forall \ i = 0, .., n\}$$

Ορισμός 1.4 .

κ-πλευρά ενός n-simplex είναι ένα κ-simplex με κορυφές ένα υποσύνολο κ-κορυφών του $[v_0, v_1, .., v_n]$.

Ορισμός 1.5 .

Ένα **Δ-σύμπλεγμα** είναι ένας χώρος πηλίκο που παίρνουμε από μια ξένη ένωση από διατεταγμένα simplices ταυτίζοντας μερικές απ' τις πλευρές τους μέσω του κανονικού ομοιομορφισμού.

Ορισμός 1.6 *Χαρακτηριστική απεικόνιση ενός n-simplex.*

Ορίζουμε :

$$\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.7 .

Μία ιδιότητα της χαρακτηριστικής απεικόνισης είναι ότι οι περιορισμοί της σε n-1 πλευρές του Δ^n είναι χαρακτηριστικές απεικονίσεις σ_β για ανοικτά simplices e_β^{n-1} του X.

1.2 Simplicial ομολογία

Ορισμός 1.8 .

Ένα **simplicial σύμπλεγμα** είναι ένα Δ-σύμπλεγμα X τέτοιο, ώστε αν σ, τ simplices του X, τότε:

$$\sigma \cap \tau = \emptyset \quad \eta \ \sigma \cap \tau \ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha \ \tau\omega\nu \ \sigma, \tau$$

Δηλαδή, είναι ένα Δ-σύμπλεγμα στο οποίο κάθε δύο simplices είτε δεν τέμνονται, είτε η τομή τους είναι μία πλευρά τους.

Ορισμός 1.9 .

Αν S είναι ένα σύνολο τότε η **ελεύθερη ομάδα με βάση το S** είναι η ομάδα :

$$\mathbb{Z}^{|S|} =< s_1 > \oplus < s_2 > \oplus \ldots \oplus < s_n >$$

για S πεπερασμένο σύνολο.Ή αλλιώς το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των s_i με συντελεστές από τους ακέραιους.

Ορισμός 1.10 .

Αν X είναι ένα Δ-σύμπλεγμα τότε ορίζουμε $\mathbf{\Delta_n(X)}$ την ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση τα ανοικτά n-simplices του X. Έτσι ένα $\chi \in \ \Delta_n(X)$ θα γράφεται : $x = \sum_{a=1}^{k} n_a e_a^n, n_a \in \ \mathbb{Z}$. Κάθε τέτοιο στοιχείο καλείται **n-αλυσίδα**.

Ορισμός 1.11 .

Σύνορο ενός n-συμπλέγματος $[v_0, v_1, ..., v_n]$ ονομάζουμε το n-1 σύμπλεγμα :

$$\partial[v_0, v_1, ..., v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, v_1, .., \widehat{v_i}, ..., v_n]$$

Δηλαδή είναι το σύνορο με τη φυσιολογική έννοια του, λαμβάνοντας υπόψην και τον προσανατολισμό, ώστε τελικά να έχουμε προσανατολισμός σύμφωνα ή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

Ορισμός 1.12 .

Σε ένα Δ-σύμπλεγμα X ορίζουμε τον συνοριακό ομομορφισμό :

$$\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \ \Delta_{n-1}(X) \ \mu\varepsilon \ \partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, ..., \widehat{v_i}, .., v_n]}$$

Δηλαδή, ο συνοριακός ομομορφισμός ορίζεται από τις n στις n-1 αλυσίδες ενός Δ- συμπλέγματος παίρνοντας το σύνορο ενός n- συμπλέγματος. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το συνοριακό ομομορφισμό και πάνω στα ανοικτά n- simplices από τα οποία παράγεται η $\Delta_n(X)$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 1.11.

Λήμμα 1.13 .

Η σύνθεση $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

Ορισμός 1.14 .

Αλυσιδωτό σύμπλεγμα(chain complex) καλείται η ακολουθία αβελιανών ομάδων : $C_n = \Delta_n(X)$ με τους ομομορφισμούς :

$$\ldots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \ldots \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

ώστε : $Im(\ \partial_{n+1}) \subset \ ker(\ \partial_n)$

Ορισμός 1.15 .

Η **n- ομάδα ομολογίας** του αλυσιδωτού συμπλέγματος είναι η :

$$H_n = \frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$$

n-κύκλος καλείται κάθε στοιχείου του $Ker\partial_n$. **Σύνορο** καλείται κάθε στοιχείο του $Im(\partial_{n+1})$. **Ομόλογοι** λέγονται δύο κύκλοι οι οποίοι παριστούν την ίδια ομολογία. **Κλάσεις ομολογίας** λέγονται τα στοιχεία της H_n τα οποία είναι σύμπλοκα της $Im(\partial_{n+1})$.

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.16 .

Συνεπώς για να υπολογίσουμε τις n- ομάδες ομολογίας ενός συμπλέγματος ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

- Κατασκευάζουμε το Δ-σύμπλεγμα από τα n-simplices
- Υπολογίζουμε τις n- αλυσίδες $C_n = \Delta_\nu(X)$ που παράγονται από τα ανοικτά n- simplices του Δ- συμπλέγματος X. Προσοχή, λαμβάνω υπόψη μου και τις ταυτίσεις που έχουν γίνει λόγω των σχέσεων ισοδυναμίας ως προς τις οποίες κατασκευάστηκε το Δ-σύμπλεγμα.
- Υπολογίζω τους συνοριακούς ομομορφισμούς ∂_n επί των βάσεων των n- αλυσίδων που βρήκα στο προηγούμενο βήμα.
- Τέλος υπολογίζω τους κατάλληλους πυρήνες και τις κατάλληλες εικόνες των ομομορφισμών του προηγουμένου βήματος.

1.3 Ιδιάζουσα ομολογία(singular Homology)

Ορισμός 1.17 .

Ένα **ιδιάζων n-simplex** σ'ένα χώρο X είναι μία (συνεχής) απεικόνιση $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Ορισμός 1.18 .

Ορίζουμε την ομάδα των **n- αλυσίδων** να είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται με βάση τα ιδιάζοντα n-simplices του X. **Συνοριακός ομομορφισμός** στις n- αλυσίδες ορίζεται η απεικόνιση :

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\iota=0}^{n} (-1)^{\iota} \; \sigma|_{[v_0,...,\widehat{v_i},..,v_n]}$$

για τις οποίες ισχύει βέβαια ότι : $\partial_n o \; \partial_{n+1}(\sigma) = 0$.

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.19 .

Στην πραγματικότητα στην παραπάνω έκφραση του συνοριακού ομομορφισμού έχουμε τον περιορισμό της σ στο $[v_0, ..., \widehat{v_i}, .., v_n] \in \Delta^{n-1}$ το n-1 standard ιδιάζων simplex. Δηλαδή τελικά είναι : $\sigma : \Delta^{n-1} \rightarrow X$, δηλαδή ένα n-1 simplex.

Ορισμός 1.20 .

Ιδιάζουσα n- ομάδα ομολογίας ορίζουμε να είναι η :

$$H_n(X) = \frac{ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$$

στην αλυσίδα :

$$\ldots \rightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{\nu+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.21 .

Αν X∼Ψ ομοιομορφικοί χώροι τότε θα έχουν την ίδια ιδιάζουσα ομάδα ομολογίας $H_n(X) = H_n(\Psi)$, $\forall \; n$, διότι : $\begin{matrix} C_n(X) \rightarrow & C_n(\Psi) \\ \sigma \rightarrow & \text{fo}\sigma \end{matrix}$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.22 .

Ένας χώρος X καλείται κατά τόξα συνεκτικός, αν για κάθε δύο σημεία του υπάρχει μία καμπύλη που τα συνδέει. Δηλαδή :

$$\forall \;\; \alpha, \beta \in \; X, \; \exists \;\; \rho : [0,1] \rightarrow \; X \; \mu\varepsilon \; \rho(0) = \alpha \; \kappa\alpha\iota \; \rho(1) = \beta$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.23 *Η ιδιάζουσα ομολογία ως ειδική περίπτωση της simplicial ομολογίας.*

Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο χώρο X και ορίζουμε το **ιδιάζον σύμπλεγμα S(X)** να είναι το Δ-σύμπλεγμα με ένα n-simplex Δ^n_σ για κάθε ιδιάζων n-simplex $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, το οποίο ενώνεται με τα n-1 simplices του S(X) με τον προφανή τρόπο. Τότε η simplicial ομολογία $H^{\Delta}_n(S(X))$ ταυτίζεται με την ιδιάζουσα ομολογία $H_n(X)$.

Πρόταση 1.24 .

Αν X_α είναι οι κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες του X, τότε ισχύει ότι :

$$H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha), \ \forall \ n \in \ \mathbb{N}$$

Πρόταση 1.25 .

Αν ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός τότε: $H_0(X) \ \cong \ \mathbb{Z}$. Γενικά, ο $H_0(X)$ είναι ένα ευθύ άθροισμα από $\mathbb{Z}$, ένα για κάθε κατά τόξα συνιστώσα του X.

Πρόταση 1.26 .

Αν X={ρ} τότε $H_n(X) = 0, \forall \ n > 0$ και $H_0(X) = \ \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.27 .

Η 1.25 μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την 0 - ομάδα ομολογίας, βρίσκοντας τις κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες του χώρου X. Επίσης στην ίδια πρόταση για την απόδειξη χρησιμοποιείται η συνάρτηση $\varepsilon : C_0(X) \to \ \mathbb{Z} \ : \ \sum_{i=1}^k n_i\sigma_i \to \ \sum_{i=1}^k n_i$.

Ορισμός 1.28 .

Ορίζουμε τις **ανηγμένες ομάδες ομολογίας** $\widetilde{H}_n(X)$ να είναι οι ομάδες ομολογίας της αλυσίδας :

$$\ldots \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \ \mathbb{Z} \to \ 0$$

όπου ε η απεικόνιση όπως παραπάνω. Τώρα έχουμε ότι :

$$\widetilde{H}_n(X) \ \cong \ H_n(X), \forall \ n > 0 \ \textit{και} \ H_0(X) \ \cong \ \widetilde{H}_0(X) \oplus \ \mathbb{Z}$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.29 .

Μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathbb{Z}$στην παραπάνω αλυσίδα του ορισμού 1.28 ότι παράγεται από την μοναδική απεικόνιση που στέλνει το κενό σύνολο στο X, όπου το κενό είναι το κενό simplex χωρίς κορυφές. Τότε η απεικόνιση ε είναι η συνήθης συνοριακή απεικόνιση αφού : $\partial[v_0] = [\hat{v_0}] = [\emptyset]$.

1.4 Ομοτοπικές αναλλοίωτες

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε ότι ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας.

Ορισμός 1.30 .

Αν $f : X \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση, τότε ορίζεται η : $\begin{array}{ccc} f_{\#} : C_n(X) & \to & C_n(Y) \\ \sigma : \Delta^n \to X & \to & fo\sigma(: \Delta^n \to \; Y) \end{array}$ η οποία είναι προφανώς ομομορφισμός.

Πρόταση 1.31 .

Ο ομομορφισμός $f_{\#}$ μετατίθεται με τον συνοριακό ομομορφισμό ∂. Δηλαδή : $f_{\#}o\partial = \partial o f_{\#}$.

Ορισμός 1.32 .

Μία ακολουθία $\{C_n(X)\}$ n-αλυσίδων με τους συνοριακούς ομομορφισμούς καλείται **αλυσιδωτό σύμπλεγμα**.

Ορισμός 1.33 .

Ένας ομομομορφισμός $h : \{C_n\} \to \{D_n\}$, ο οποίος μετατίθεται με το συνοριακό ομομορφισμό ∂λέγεται **αλυσιδωτή απεικόνιση**. Δηλαδή έχουμε μεταθετικότητα στα παρακάτω διαγράμματα :

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \xrightarrow{\partial} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial} \ldots \\ & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & \\ \ldots \xrightarrow{\partial} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & D_n & \xrightarrow{\partial} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial} \ldots \end{array}$$

Πρόταση 1.34 .

Η $f_{\#}$ είναι μία αλυσιδωτή απεικόνιση.

Πρόταση 1.35 .

Η $f_{\#}$ επάγει έναν ομομορφισμό : $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$. Διότι η $f_{\#}$ διατηρεί τους κύκλους και τα σύνορα.

Θεώρημα 1.36 .

Αν $f, g : X \to Y$ ομοτοπικές απεικονίσεις, τότε : $f_* = g_*$.

Πόρισμα 1.37 .

Αν X,Y ομοτοπικά ισοδύναμοι, τότε : $H_n(X) = H_n(Y)$.

Ορισμός 1.38 .

Αν $\{A_n\}, \{B_n\}$ αλυσιδωτά συμπλέγματα και $\alpha, \beta : \{A_n\} \to \; \{B_n\}$ αλυσιδωτές απεικονίσεις, ώστε να υπάρχει : $P : A_n \to \; B_{n+1}.\forall \; n$ με $\alpha - \beta = \; \partial P + P \; \partial$, τότε λέμε ότι οι α,β είναι **αλυσιδωτά ομοτοπικές** και ο P λέγεται μία **αλυσιδωτή ομοτοπία** από τον α στον β.

Πόρισμα 1.39 .

Δύο αλυσιδωτά ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν τον ίδιο ομομορφισμό στην ομολογία $\alpha_* = \beta_*$.

1.5 Ακριβείς ακολουθίες και εκτομή

Ορισμός 1.40 .

Μία ακολουθία ομομορφισμών :

$$\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} C_n \xrightarrow{\alpha_n} C_{n-1} \to \ \ldots$$

όπου C_n αβελιανές ομάδες λέγεται **ακριβής**, αν : $Ker(\alpha_n) = Im(\alpha_{n+1}), \forall\ n$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.41 .

Προφανώς το $\{C_n\}$ είναι ένα αλυσιδωτό σύμπλεγμα, αφού ισχύει $\alpha_n o \alpha_{n+1}$. Ακόμα η ομολογία του αλυσιδωτού αυτού συμπλέγματος είναι τετριμμένη, διότι έχουμε :

$$\frac{ker\alpha_n}{Im\alpha_{n+1}} = \{0\}$$

αφού $ker\alpha_n \subset\ Im\alpha_{n+1}$.

Ορισμός 1.42 .

Ονομάζεται **βραχεία ακριβής ακολουθία** η ακριβής ακολουθία:

$$0 \to\ A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \mathit{\Gamma} \to\ 0$$

απ'όπου προκύπτει ότι : α 1-1, β επί και Kerβ=Imα, οπότε :

$$\mathit{\Gamma}\ \cong\ B/ker\beta\ \cong\ B/Im\beta\ \cong\ B/A$$

Ορισμός 1.43 .

Αν A είναι υπόχωρος του X τότε μπορούμε να ορίσουμε καλώς το χώρο πηλίκο :

$$C_n(X, A) = \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

όπου $C_n(A) = \{\sigma : \mathit{\Delta}^n \to\ A\}$. Ορίζουμε επίσης τη συνοριακή απεικόνιση :

$$\overline{\partial} : \begin{array}{ccc} \frac{C_n(X)}{C_n(A)} & \to & \frac{C_{n-1}(X)}{C_{n-1}(A)} \\ cmodC_n(A) & \to & \partial cmodC_{n-1}(A) \end{array}$$

Οπότε έχουμε γράφοντας και πάλι ∂τη νέα συνοριακή απεικόνιση έχουμε το αλυσιδωτό σύμπλεγμα:

$$\ldots \to C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \to\ \ldots$$

Ορισμός 1.44 .

Ορίζουμε **σχετική ομάδα ομολογίας** να είναι :

$$H_n(X, A) = \frac{Ker\ \partial_n}{Im\ \partial_{n+1}}$$

Θεώρημα 1.45 .

Η ακολουθία των ομάδων ομολογίας :

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(\Gamma) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} H_{n-1}(B) \ldots$$

είναι ακριβής ακολουθία.

Πρόταση 1.46 .

Αν δύο απεικονίσεις $f, g : (X, A) \to (Y, B)$, είναι ομοτοπικές, τότε και οι επαγόμενες στην ομολογία απεικονίσεις ταυτίζονται : $f_* = g_*$

Θεώρημα 1.47 *Θεώρημα Εκτομής.*

Δοθέντων $Z \subset A \subset X$, ώστε : $\overline{Z} \subset \mathring{A}$,τότε η εμφύτευση : $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς ομολογίας : $H_n(X - Z, A - Z) \to H_n(X, A), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, για υπόχωρους $A, B \subset X$, των οποίων τα εσωτερικά καλύπτουν το X, τότε η εμφύτευση : $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς : $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$

Ορισμός 1.48 .

Ένα ζεύγος (X,A) ενός χώρου X και ενός μη κενού κλειστού υποχώρου του A, ο οποίος είναι συστολή παραμόρφωσης κάποιας περιοχής του X, καλείται **καλό ζεύγος**.

Πρόταση 1.49 .

Για καλά ζεύγη (X,A) η απεικόνιση πηλίκο : $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ επάγει ισομορφισμούς :

$$q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \widetilde{H}_n(X, A), \forall\, n$$

Ευρετήριο

Περιεχόμενα