ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Σωτήριος Δ. Χασάπης
Μαθηματικός

8 Ιουνίου, 2006

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ορισμός 1.1 .

Μετάθεση ενός μη κενού συνόλου S είναι μία 1-1 απεικόνιση π : S → S. Συμβολίζουμε με G(S) το σύνολο των μεταθέσεων του S και με G_n το σύνολο των μεταθέσεων σε n σύμβολα.

Ορισμός 1.2 .

Δράση της ομάδος Gστο Sείναι μία απεικόνιση : $Gx\ S \to S : (g,s) \to g\cdot s$, ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες : $\begin{cases} \text{(gh)s=g(sh),} \\ \text{es=s}, \ \forall\ g,h \in G, s\in S \end{cases}$

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.3 .

Για σταθερό g∈ Gη απεικόνιση $\sigma_g \begin{array}{ccc} S & \to & S \\ (s) & \to & \sigma_g(s)=gs \end{array}$ είναι μία μετάθεση του S με αντίστροφη την απεικόνιση $\sigma_{g^{-1}}$ και ομομορφισμός ομάδων.

Παρατήρηση - Σχόλιο 1.4 *Συμβολισμοί.*

Συμβολίζουμε παρακάτω ως εξής :

1. $G(S)$: το σύνολο των μεταθέσεων του S
2. $GL(V)$: η ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών ενδομορφισμών του V
3. GL_d : η ομάδα των αντιστρέψιμων dxd πινάκων του $\mathbb{C}$
4. Mat_d : η άλγεβρα των dxd $\mathbb{C}$-πινάκων

2 Αναπαραστάσεις

Ορισμός 2.1 .

Ένας δχ V λέμε ότι είναι ένα G - πρότυπο, αν έχουμε μία γραμμική δράση της Gεπί του V, δηλαδή αν έχουμε μία απεικόνιση $\begin{array}{ccc} G\text{x}V & \to & V \\ (g,\upsilon) & \to & g\upsilon \end{array}$ τέτοια, ώστε :

1.$g(a+b)=ga+gb$
2.$g(\lambda v)=\lambda(gv)$
3.$(g_1g_2)v=g_1(g_2v),\ \forall a,b,v\in V, g,g_1,g_2\in G\ \lambda\in\ k$

 sotirishasapis@yahoo.gr

Ορισμός 2.2 .

Αναπαράσταση της Gείναι ένας ομομορφισμός ομάδων ρ:$G\rightarrow$ GL(V). O ρ δίνει στο V δομή G-προτύπου. Η διάσταση $d = dim\ {}_{\mathbb{C}}V$ λέγεται βαθμός ή διάσταση της ρ.

Πρόταση 2.3 .

Αν ο V είναι ένα G-πρότυπο και ορίσουμε $gf \in V^*$ με $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$, τότε ο V^* είναι επίσης G-πρότυπο.

Παρατήρηση - Σχόλιο 2.4 .

Επιλέγοντας μία βάση του διανυσματικού χώρου V, ως προς τον οποίο έχουμε την αναπαράσταση της G, τότε μπορούμε να πάρουμε έναν ομομορφισμό $\chi : G \rightarrow\ GL_d$.

Παράδειγμα 2.5 .

Αν $G = \{e, g\}, g^2 = e$, τότε η $\chi : G \rightarrow\ GL_2$ με $\chi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αναπαράσταση της Gβαθμού 2.

Πρόταση 2.6 .

Η δράση της Gεπεκτείνεται στο $\mathbb{C}S$ως εξής :

$$g(c_1s_1 + ... + c_ns_n) = c_1(gs_1) + ... + c_n(gs_n) \in\ \mathbb{C}S$$

για g∈ G, $c_i \in\ \mathbb{C}$ και το $\mathbb{C}S$καθίσταται G- πρότυπο βαθμού n. Η αντίστοιχη αναπαράσταση καλείται αναπαράσταση μεταθέσεων.

Παράδειγμα 2.7 .

Αν G= {e,g}, $g^2 = e$ δρα επί του $S = \{s_1, s_2\}$ με $es_1 = s_1, es_2 = s_2, gs_1 = s_2, gs_2 = s_1$ τότε η αντίστοιχη αναπαράσταση στο V= $\mathbb{C}S = \{c_1s_1 + c_2s_2, c_1, c_2 \in\ \mathbb{C}\}$ ως προς τη βάση $S = \{s_1, s_2\}$ είναι αυτή του παραδείγματος 2.5. 3

Παράδειγμα 2.10 .

Η αναπαράσταση της $G = \{\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_\mu\}$ στο $\mathbb{C}G = \{\alpha_1\gamma_1 + ... + \alpha_\mu\gamma_\mu : \alpha_\iota \in\ \ \mathbb{C}\}$ ορίζεται από τη δράση της Gστον εαυτό της και λέγεται κανονική αναπαράσταση της Gκαι έχει βαθμό μ=πληθικός αριθμός της G.

3 Ανάγωγες αναπαραστάσεις και το θεώρημα του Maschke

Θεώρημα 3.1 .

Αν V,W είναι G- πρότυπα, τότε και το ευθύ άθροισμα αυτών είναι G- πρότυπο, θέτοντας :

$$g(v \oplus w) = gv \oplus gw, \ \forall \ g \in G, \ v, w \ \in \ W$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 3.2 .

Αν Β,Γ είναι βάσεις των δχ V,W αντίστοιχα, τότε ως προς τη βάση $B \cup \Gamma$ οι πίνακες της αναπαράστασης της Gστο ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ θα είναι της μορφής :

$$\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

Ορισμός 3.3 .

Έστω V ένα G-πρότυπο. Μία <u>υποαναπαράσταση</u> ή G- υποπρότυπο του V είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος W του V, ώστε : $\boxed{gw \ \in \ W, \ \forall g \in G, w \in W}$. Ο W λέγεται <u>G-αναλλοίωτος υπόχωρος</u> του V. Το W λέγεται <u>μη</u> <u>προφανές</u> G- υποπρότυπο, αν $W \neq \{0\}, V$.
Η αναπαράσταση V λέγεται <u>ανάγωγη</u> (irreducible), αν δεν έχει μη προφανείς G- υποαναπαραστάσεις. Δηλαδή για ένα G-πρότυπο τα μόνα G-αναλλοίωτα υποπρότυπά του είναι το τετριμμένο και ολόκληρος ο χώρος.

Θεώρημα 3.4 *Maschke.*

Έστω Gπεπερασμένη ομάδα και $V \neq \{0\}$ G- πρότυπο διάστασης δ, τότε :

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_\delta$$

για κάποια ανάγωγα G- υποπρότυπα W_i του V.

Ορισμός 3.5 *Gαναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο.*

Ένα εσωτερικό γινόμενο $<,>$ στο V λέγεται <u>G-αναλλοίωτο</u>, αν ισχύει :

$$< gv, gw > = < v, w >, \ \forall g \in G, \ v, w \in W$$

Λήμμα 3.6 .

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός G- υποπροτύπου μέσω ενός G- αναλλοίωτου εσωτερικού γινομένου παραμένει G- υποπρότυπο.

4 G- ομομορφισμοί και το λήμμα του Schur

Ορισμός 4.1 .

Αν V,W δύο G-πρότυπα, τότε μία απεικόνιση μεταξύ των V,W καλείται G-ομομορφισμός, αν είναι γραμμική και διατηρεί τη δράση της ομάδας, δηλαδή :

$$\varphi : V \rightarrow \ W$$

$$\varphi(gv) = g\varphi(v), \forall \ \ g \in G, v \in V$$

Ο φ λέγεται G-ισομορφισμός, αν επιπλέον είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Οι V,W λέγονται ισόμορφα G- πρότυπα, αν υπάρχει G- ισομορφισμός μεταξύ τους.

Λήμμα 4.3 .

Αν V είναι G-πρότυπο και W G-αναλλοίωτος υπόχωρός του, τότε το πηλίκο:
$V/W = \{v + W : \ v \in V\}$ γίνεται G-πρότυπο, ορίζοντας:

$$g(v + W) = gv + W, \ \forall g \in G, v \in V$$

και η φυσική προβολή : $V \rightarrow \ V/W$ είναι G-ομομορφισμός.

Αν V,W είναι G-πρότυπα και φ:V→ W G-ομομορφισμός, τότε ο πυρήνας $\ker \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$ και η εικόνα $Im\varphi = \{\varphi(v) : v \in V\}$ είναι *G-αναλλοίωτοι* υπόχωροι των V,W αντίστοιχα. Ο συνπυρήνας $coker\varphi = W/Im\varphi$ έχει τη δομή G-προτύπου όπως στο πηλίκο.

Θεώρημα 4.4 *Λήμμα Schur.*

Έστω V,W ανάγωγα G- πρότυπα και φ: V→ W G- ομομορφισμός, τότε :
α) φ(ω)=0, για κάθε ω∈ V, είτε ο φ είναι G- ισομορφισμός(Δηλαδή είτε kerφ=0, είτε kerφ=V).
β)Αν W=V και ο φ είναι ισομορφισμός, τότε υπάρχει $c \in \ \mathbb{C} - \{0\}$ με φ(ω)=cω, για κάθε ω∈ V.

Πόρισμα 4.5 .

Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση μίας *αβελιανής ομάδας* G έχει βαθμό 1.

Πόρισμα 4.6 .

Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της κυκλικής ομάδας: $G = \{g^n = e, g, ..., g^{n-1}\}$ είναι της μορφής ρ:$G\rightarrow \ \mathbb{C}$ με $\rho(g^i) = \zeta^i$, για ζ κάποια νιοστή ρίζα της μονάδας.

5 Χαρακτήρες

Ορισμός 5.1 *Χαρακτήρας.*

Έστω μία αναπαράσταση $\rho : G \to \ GL(V),\ d = dim\ _{\mathbb{C}}V$. Ο χαρακτήρας χ (ή χ_ρ ή χ_V) της ρ είναι μία συνάρτηση : χ=χ_ρ : $G \to \ \mathbb{C}$ με $\boxed{\chi(g) = tr(\rho(g)|_V)}$, το ίχνος του ρ(g):V→ V. Ένας χαρακτήρας λέγεται <u>ανάγωγος</u> αν η ρ είναι ανάγωγη. <u>Βαθμός του χαρακτήρα</u> χ λέγεται ο βαθμός d της ρ. Δηλαδή, ο χαρακτήρας μίας αναπαράστασης είναι μία συνάρτηση, η οποία αντιστοιχεί κάθε στοιχείο της ομάδας στο ίχνος του αυτομορφισμού που ορίζει το στοιχείο μέσω της αναπαράστασής της.

Παρατήρηση - Σχόλιο 5.2 .

Προφανώς αν έχουμε μία αναπαράσταση πινάκων της ομάδος G τότε ο χαρακτήρας της αναπαράστασης ορίζεται από το ίχνος του πίνακα, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο της ομάδος.

Πόρισμα 5.5 .

Αν χ^{reg} είναι ο χαρακτήρας της κανονικής αναπαράστασης $\mathbb{C}G$ της G τότε :

$$\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{g=e} \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\epsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 5.6 .

Έστω χ,ψ χαρακτήρες των αναπαραστάσεων V,W της G αντίστοιχα, τότε :

i) $\chi(e) = dim\ _{\mathbb{C}}V$

ii) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g), \forall\ \ g, h \in\ \mathbb{C}$, δηλαδή ένας χαρακτήρας είναι σταθερός σε κάθε κλάση συζυγίας της G.

iii) Αν οι V,W ισόμορφες αναπαραστάσεις, τότε : $\chi(g) = \psi(g), \forall\ g \in G$.

Ορισμός 5.7 .

Αν $\chi, \psi : G\ \to\ \ \mathbb{C}$ ορίζουμε το <u>ερμητιανό</u> <u>γινόμενο</u> :

$$< \chi, \psi >= \frac{1}{|G|}\ \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)}\psi(g)$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 5.8 .

Για χαρακτήρες $\chi, \psi : G \to\ \ \mathbb{C}$ έχουμε :

$$< \chi, \psi >= \frac{1}{|G|}\ \sum_{g\in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$$

Θεώρημα 5.9 .

Έστω $\rho_1, \rho_2, ...$ οι κλάσεις ισομορφίας των αναγώγων αναπαραστάσεων της G και $\chi_1, \chi_2, ...$ οι χαρακτήρες τους αντίστοιχα, τότε :

i)(ορθογωνιότητα)

$$< x_i, y_i >= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ii) Υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος κλάσεις ισομορφίας ανάγωγων αναπαραστάσεων στην G, τόσες όσες και οι κλάσεις συζυγίας της G.

iii)

$$|G| = \sum_i (dim\chi_i)^2$$

Παρατήρηση : Δύο ισόμορφες αναπαραστάσεις έχουν ερμητιανό γινόμενο χαρακτήρων 1, ενώ οι μη ισόμορφες αναπαραστάσεις έχουν ερμητιανό γινόμενο χαρακτήρων 0.

Παρατήρηση: $\boxed{Cl\ _{\mathbb{C}}(G) = \{f : G \to \ \mathbb{C}\}}$ σταθερές σε κάθε κλάση συζυγίας της G με ερμητιανό γινόμενο : $< \alpha, \beta >= \frac{1}{|G|} \ \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g)$

Πόρισμα 5.10 .

Οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του $Cl\ _{\mathbb{C}}(G)$ ως προς το $<,>$.

6 Τανυστικό γινόμενο και Hom

Ορισμός 6.1 .

Το ταναυστικό γινόμενο (tensor product) $V \bigotimes_{\mathbb{C}} W = V \bigotimes W$ των $\mathbb{C}$- διανυσματικών χώρων V, W είναι το σύνολο των $\mathbb{C}$- γραμμικών συνδυασμών :

$$\sum_{i,j} c_{ij} v_i \otimes w_j, \ c_{ij} \in \mathbb{C}, v_i \in V, w_j \in W$$

με σχέσεις :

$$(c_1 v_1 + c_2 v_2) \otimes w = c_1 v_1 \otimes w + c_2 v_2 \otimes w$$

$$v \otimes (d_1 w_1 + d_2 w_2) = d_1 v \otimes w_1 + d_2 v \otimes w_2$$

7 Προβολές και ορθογωνιότητα

8 Περιορισμός και επαγωγή

9 Διαμερίσεις ακεραίων

9.1 Υποομάδες Young και ταμπλώ

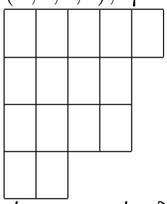
Ορισμός 9.1 .

Διαμέριση (ή μερισμός) του $n \in \mathbb{N}$ είναι ένα διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_\varkappa) \in \mathbb{N}^*$ με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\varkappa \geq 1$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\varkappa = n$.
Τα λ_ι λέγονται μέρη του λ. Γράφουμε $\lambda \vdash n$ και λ=$< 1^{m_1}, 2^{m_2}, ..., n^{m_n} >$ αν $m_i = \#\{1 \leq j \leq k : \lambda_j = i\}$

Παρατήρηση - Σχόλιο 9.2 .

Πρόκειται για τους τρόπους με τους οποίους μπορώ να γράψω έναν ακέραιο ν ως άθροισμα μικρότερών του διατεταγμένων σε φθίνουσα σειρά.

Παράδειγμα 9.2 .

Ο αριθμός ν=15 μπορεί να διαμερισθεί : λ=(5,4,4,2), η οποία μπορεί να γραφεί επίσης : $(1^0, 2^1, 3^0, 4^2, 5^1)$ και να παρασταθεί με τα διαγράμματα Young:  και Ferrers:  Επίσης σε κάθε μετάθεση $\pi \in S_n$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία διαμέριση λ του ν, θέτοντας μ_ι το πλήθος των κύκλων μήκους ι της π. Για παράδειγμα στην $\pi = (1\ 7\ 2\ 11)(3\ 15\ 9\ 12\ 6)(4\ 10\ 8\ 14)(5\ 13)$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τη διαμέριση λ=(5,4,4,2). Το λ λέγεται τύπος (type) της π.

Λήμμα 9.3 .

α) Δύο μεταθέσεις της S_n ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας, ανν έχουν τον ίδιο τύπο.
β) Αν λ=$< 1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, ..., \nu^{\mu_\nu} > \vdash \nu$ τότε η κλάση συζυγίας της S_n που αντιστοιχεί στο λ έχει: $\frac{\nu!}{\zeta_\lambda}$ στοιχεία όπου $\zeta_\lambda = 1^{\mu_1}\mu_1! \cdot 2^{\mu_2}\mu_2! \cdot, ..., \cdot \nu^{\mu_\nu}\mu_\nu!$.

Ορισμός 9.4 *Διατάξεις διαμερίσεων.*

Γράφουμε λ$\rhd$ μ ή(μ $\lhd$ λ) και λέμε ότι το λ κυριαρχεί του μ (dominates), αν :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\iota \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_\iota, \forall i \geq 1$$

Γράφουμε $\lambda >_{rlex} \mu$ (αντίστροφη λεξικογραφική διάταξη) αν η πρώτη διαφορά $\lambda_\iota - \mu_\iota$ που δε μηδενίζεται είναι θετική. Η διάταξη της κυριαρχίας είναι μερική, ενώ η αντίστροφη λεξικογραφική διάταξη είναι ολική για το σύνολο των διαμερίσεων.

Λήμμα 9.5 .

Αν λ,μ $\vdash$ ν και $\lambda \rhd \mu \Rightarrow \lambda \geq_{rlex} \mu$.
Δηλαδή αν μία διάταξη κυριαρχεί μίας άλλης τότε θα είναι και αντιστρόφως λεξικογραφικά μεγαλύτερη.

Παρατήρηση - Σχόλιο 9.6 .

Οι σχέσεις $\lhd$ και $\leq_{rlex}$ είναι μερικές διατάξεις στο σύνολο των διαμερίσεων του ν.

Αν $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\varkappa) \vdash \nu$ η υποομάδα Young της S_n τύπου λ είναι το ευθύ γινόμενο : $S_\lambda = S(\{1, 2, .., \lambda_1\}) \times S(\{\lambda_1 + 1, .., \lambda_1 + \lambda_2\}) \times ... \times S(\{n - \lambda_\varkappa + 1, .., n\}) = S_{\lambda_1} \times ... \times S_{\lambda_\varkappa}$. Δηλαδή

πρόκειται για το ευθύ γινόμενο των μεταθέσεων στα πρώτα λ_1 στοιχεία με τα επόμενα λ_2 στοιχεία κλπ.
Ένα ταμπλώ σχήματος λ είναι μία 1-1 αντιστοιχία των στοιχείων του [ν] με τα τετράγωνα του διαγράμματος Young του λ. Δηλαδή παίρνουμε το διάγραμμα Young σχήματος λ⊢n και του αντιστοιχούμε τα νούμερα 1,2,...,n.

Παράδειγμα 9.7 .

λ=(5,4,4,2)⊢15, τότε :

$$S_\lambda = S(\{1,2,..,5\}) \times S(\{6,7,8,9\}) \times S(\{10,11,12,13\}) \times S(\{14,15\})$$

και ένα ταμπλώ σχήματος λ είναι :

3	14	6	11	2
7	12	1	5	
13	4	15	8	
10	9			

Λήμμα 9.7 .

Έστω λ,μ ⊢ν. Αν Τ,Σ ταμπλώ σχήματος λ και μ αντίστοιχα και για κάθε γραμμή ρ του Σ τα στοιχεία της ρ εμφανίζονται σε διαφορετικές ανά δύο στήλες του Τ, τότε λ⊳μ.

Παράδειγμα 9.8 .

$\lambda = (5,4,4,2) \trianglerighteq \mu = (4,4,3,3,1)$, δηλαδή $\lambda \trianglerighteq \mu$. T=

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11	12	14	
15	13			

και S=

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
12	13	14	
15			

10 Specht Modules

Συμβολισμός : Έστω Τ ταμπλώ σχήματος λ⊢ν, τότε συμβολίζουμε με :

$$\mathbf{R(T)} = \{\pi \in \ S_\nu : \text{Η π διατηρεί τις γραμμές του Τ}\}$$

$$\mathbf{C(T)} = \{\pi \in \ S_\nu : \text{Η π διατηρεί τις στήλες του Τ}\}$$

Παρατήρηση - Σχόλιο 10.1 .

Αν π ∈ S_n έχουμε :

α) $R(\pi T) = \pi R(T)\pi^{-1}$

β) $C(\pi T) = \pi C(T)\pi^{-1}$

Ορισμός 10.2 .

Ταμπλοειδές (tabloid) σχήματος λ είναι μία από τις κλάσεις ισοδυναμίας του συνόλου των ταμπλώ σχήματος λ όπου δύο ταμπλώ θεωρούνται ισοδύναμα (T,T′), αν $\boxed{T' = \pi T, \text{ για κάποιο } \pi \in \mathrm{R(T)}}$. Δηλαδή, ένα ταμπλοειδές είναι μία κλάση ισοδυναμίας που δημιουργείται από τη δράση της υποομάδας $R(T)$ στο σύνολο των tableau.

Παρατήρηση - Σχόλιο 10.3 *Πλήθος ταμπλώ και ταμπλοειδών σχήματος λ.*

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_\mu) \vdash \nu$ τότε κάθε ταμπλώ σχήματος λ όπως παραπάνω μπορούμε να το διαλέξουμε με ν! τρόπους. Από την άλλη πλευρά αν θεωρήσουμε τα ταμπλοειδή τότε μπορούμε να επιλέξουμε την πρώτη γραμμή με $\begin{pmatrix} \nu \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$τρόπους, τη δεύτερη γραμμή με $\begin{pmatrix} \nu - \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ τρόπους και γενικά την κ γραμμή με $\nu - \lambda_1 - \lambda_2 - ... - \lambda_{\varkappa-1}$ ανά $\lambda_\varkappa$ τρόπους, άρα συνολικά υπάρχουν : $\begin{pmatrix} \nu \\ \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu - \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} \nu - \lambda_1 - \lambda_2 - ... - \lambda_{\varkappa-1} \\ \lambda_\varkappa \end{pmatrix}$τρόποι να φτιάξουμε ένα ταμπλοειδές.

Ορισμός 10.3 .

Η ομάδα S_n δρά στο σύνολο των ταμπλοειδών σχήματος λ⊢n με δράση :

$$\pi\{T\} = \{\pi T\}, \text{για } \pi \in \quad S_n$$

. Συμβολίζουμε με M^λ το αντίστοιχο S_n-πρότυπο.

Ορισμός 10.4 .

Ένα G-πρότυπο V λέγεται κυκλικό (παραγόμενο από το v), αν υπάρχει $v \in V$, ώστε :

$$V = \ \mathbb{C}\{gv : g \in G\}$$

.

Πρόταση 10.5 .

Το M^λ είναι κυκλικό S_n-πρότυπο ισόμορφο με την αναπαράσταση των πλευρικών κλάσεων : $\mathbb{C} \cdot S_n/S_\lambda = 1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$, όπου S_λ η υποομάδα Young τύπου λ.

Ορισμός 10.6 .

Πολυταμπλοειδές σχήματος λ⊢ ν είναι ένα στοιχείο του $M^\lambda = S_n -$ πρότυπο των ταμπλοειδών της μορφής :

$$e_T = \varkappa_T \cdot \{T\},$$

όπου T ταμπλώ σχήματος λ και $\varkappa_T = \beta_{C(T)}$, $\beta_H = \sum_{\pi \in H}(sgn\pi)\pi$. Δηλαδή το $\varkappa_T$ είναι το προσημασμένο άθροισμα των μεταθέσεων που διατηρούν τις στήλες.

Παράδειγμα 10.7 .

$\lambda = (3,2)$, T = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&1&2\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$, τότε :

$$\varkappa_\tau = e-(34)-(15)+(34)(15) = (e-(34))(e-(15))$$

Συνεπώς έχουμε :

$$e_T = \varkappa_T \cdot \{T\} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&1&2\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&2\\\hline 3&1\\\cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&5&2\\\hline 4&1\\\cline{1-2}\end{array}$$

Λήμμα 10.8 .

Για ταμπλώ T σχήματος λ⊢n και $\pi \in S_n$, έχουμε :

α)$\varkappa_{\pi T} = \pi \varkappa_T \pi^{-1}$

β)$e_{\pi T} = \pi e_T$

Ορισμός 10.9 .

Το υποσύνολο S^λ του M^λ που παράγεται γραμμικά από τα πολυταμπλοειδή σχήματος λ λέγεται Specht module του λ⊢n.

Πρόταση 10.10 .

Το S^λ είναι κυκλικό $S_n - module$ και παράγεται από οποιοδήποτε πολυταμπλοειδές e_T σχήματος λ.

Λήμμα 10.12 .

Έστω $H \leq S_n$ και $b_H = \sum_{\pi \in H}(sgn\pi)\pi \in \mathbb{C}S_n$, τότε :

i. Αν π∈ H τότε: $\pi b_H = b_H \pi = (sgn\pi) b_H$

ii. για $u, v \in M^\lambda$, τότε : $< b_H u, v > = < u, b_H v >$

iii. Αν η αντιμετάθεση $(i,j) \in H$ τότε : $b_H = x(e-(i,j))$ για κάποιο $x \in \mathbb{C}S_n$

iv. Αν $(i,j) \in H$ και το ταμπλώ T έχει το i,j στην ίδια γραμμή τότε: $b_H\{T\} = 0$.

Λήμμα 10.13 .

Έστω λ,μ⊢n και ταμπλώ T, T' σχήματος λ και μ αντίστοιχα, τότε :

i. Αν $\varkappa_T\{T'\} \neq 0 \ \Rightarrow \ \lambda \rhd \mu$

ii. Αν $\varkappa_T\{T'\} \neq 0$ *και* $\lambda = \mu \Rightarrow \quad \varkappa_T\{T'\} = \pm e_T$

Πόρισμα 10.14 .

Αν το ταμπλώ Τ έχει σχήμα λ και $u \in M^\lambda$ τότε $\varkappa_T u$ είναι πολλαπλάσιο του e_T.

Θεώρημα 10.15 *Submodule Theorem.*

Αν $U \subset M^\lambda$ είναι $S_n - module$ τότε: $U \supset S^\lambda$ ή $U \subset S^{\lambda^\perp}$.
Ειδικότερα το S^λ είναι ανάγωγο.

Πρόταση 10.16 .

Έστω $\varphi : S^\lambda \rightarrow M^\mu$ ένας S_n-ομομορφισμός, όπου λ,μ ⊢n, τότε :

i. Αν $\rho \neq 0$ τότε $\lambda \trianglerighteq \mu$

ii. Αν λ=μ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ με $\varphi(u) = cu$ για κάθε $u \in S^\lambda$.

Πόρισμα 10.17 .

Τα S^λ για λ⊢n δίνουν όλα τα ανάγωγα S_n-πρότυπα και το καθένα εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.
Επίσης, για μ⊢n έχουμε τη διάσπαση :

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$$

με $m_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $m_{\mu\mu} = 1, \forall \mu \vdash n$.

11 Young tableau

Ορισμός 11.1 .

Ένα ταμπλώ T λέγεται Young ταμπλώ, αν κάθε γραμμή και κάθε στήλη του T είναι αύξουσα προς τα δεξιά και προς τα κάτω αντίστοιχα.
Συμβολίζουμε με f^λ το πλήθος των Young ταμπλώ σχήματος λ.

Παράδειγμα 11.2 .

Προφανώς $f^n = f^{1^n} = 1$. Ενώ τα Young tableau σχήματος (3,2) είναι τα :

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$ Δηλαδή $f^{(3,2)} = 5$

Θεώρημα 11.3 .

Το σύνολο $\{e_T : T\ Young\ tableau\ σχηματος\ \lambda\}$ αποτελεί βάση του S^λ.

Πόρισμα 11.4 .

α) $\dim S^\lambda = f^\lambda$, για κάθε διαμέριση λ.

β) $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$

Ορισμός 11.5 .

Μία ασθενής σύνθεση του n είναι μία ακολουθία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\varkappa)$ μη αρνητικών ακεραίων με $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\varkappa = n$.

12 Γενικευμένα tableau

Ορισμός 12.1 *Γενικευμένο ταμπλώ.*

Γενικευμένο tableau σχήματος λ είναι μία απεικόνιση από τα τετράγωνα του διαγράμματος Young σχήματος λ στο $\mathbb{Z}_{>0}$.

Αν μ_ι το πλήθος των τετραγώνων του ταμπλώ T στα οποία αντιστοιχεί το ι τότε η ασθενής συνθεση $\mu = (\mu_1, \mu_2, ...)$ του n λέγεται περιεχόμενο (ή τύπος=type)(content) του T .

$T_{\lambda\mu}$: σύνολο γενικευμένων ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου μ.

Παρατήρηση - Σχόλιο 12.2 .

Το S_n-module M^μ ορίζεται όταν το μ είναι ασθενής σύνθεση του n και δεν εξαρτάται από τη διάταξη των μερών του μ.

Πρόταση 12.3 .

Για κάθε λ⊢n τα $\mathbb{C}T_{\lambda\mu}$ και M^μ είναι ισόμορφα ως S_n−πρότυπα.

Ορισμός 12.4 .

13 Μία βάση του Hom(S^{λ}, M^{μ}) και ο κανόνας του Young

Ορισμός 13.1 .

Το T∈ $T_{\lambda\mu}$ λέγεται γενικευμένο Young tableau σχήματος λ και περιεχομένου μ, αν οι σειρές του αυξάνουν (ασθενώς) προς τα δεξιά και οι στήλες αυξάνουν γνήσια προς τα κάτω.

$\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$: Το σύνολο των γενικευμένων Young tableau σχήματος λ και περιεχομένου μ.

Θεώρημα 13.2 .

Το σύνολο $\{\theta_T : T \in \ \mathbb{C}_{\lambda\mu}\}$ αποτελεί βάση του $Hom_{S^n}(S^{\lambda}, M^{\mu})$. Ειδικότερα ισχύει :

$$\boxed{dim Hom_{S_n}(S^{\lambda}, M^{\mu}) = \#\mathcal{Y}_{\lambda\mu}}$$

Ορισμός 13.3 *Αριθμοί Kostka.*

Οι αριθμοί $\varkappa_{\lambda\mu} = \#\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$ λέγονται αριθμοί Kostka.

Πόρισμα 13.4 *Κανόνας Young.*

Αν λ,μ ⊢n η πολλαπλότητα με την οποία το S^{λ} εμφανίζεται στη διάσταση του M^{μ} σε ανάγωγα S_n-πρότυπα είναι ίση με $\varkappa_{\lambda\mu}$. Δηλαδή :

$$\boxed{M^{\mu} \equiv \bigoplus_{\lambda \vdash n} \varkappa_{\lambda\mu} S^{\lambda}}$$

Άσκηση 13.5 .

Να δειχθεί ότι αν $K_{\lambda\mu} \neq \ 0$ τότε $\lambda \rhd \mu$ (λ,μ⊢n) και ότι $\varkappa_{\lambda\lambda} = 1$.

14 Συμβολισμοί

$S_\lambda = S(\{1,2,..,\lambda_1\}) \times S(\{\lambda_1+1,...,\lambda_1+\lambda_2\}) \times ... \times S(\{n-\lambda_\varkappa+1,...,n\}) =$

$= S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\varkappa}$**Υποομάδα Young σχήματος λ**

$\{T\}$: το ταμπλοειδές=κλάση ισοδυναμίας ταμπλώ

M^λ : Το Σ_ν-πρότυπο από τη δράση των μεταθέσεων στα ν ταμπλοειδή

$\alpha_H = \sum_{\pi\in\ H} \pi$

$b_H = \sum_{\pi\in\ H} (sgn\pi)\pi$Προσημασμένο άθροισμα μεταθέσεων

$\varkappa_T = b_{C(T)}$: Προσημασμένο άθροισμα μεταθέσεων που διατηρούν τις στήλες

$e_T = \varkappa_T.\{T\}$: **Πολυταμπλοειδές** σχήματος λ :

Το άθροισμα των δράσεων των μεταθέσεων που διατηρούν τις στήλες στο ταμπλώ Τ.

S^λ : Specht module του λ⊢n

Το υποσύνολο του M^λ που παράγεται από τα πολυταμπλοειδή σχήματος λ

f^λ : το πλήθος των Young tableau σχήματος λ

λ^i : Ασθενής σύνθεση του n

T^t : Ανάστροφο ταμπλώ που προκύπτει αντικαθιστώντας τις γραμμές με τις στήλες

$T_{\lambda\mu}$: σύνολο γενικευμένων ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου μ

$\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$: Το σύνολο των γενικευμένων Young tableau σχήματος λ και περιεχομένου μ

α

Περιεχόμενα

Ευρετήριο