

Μία περιληπτική ιστορία των μαθηματικών

Τα μαθηματικά ξεκινούν με το μέτρημα. Εντούτοις, δεν είναι λογικό να ειπωθεί ότι αυτό το πρωτόγονο μέτρημα ήταν μαθηματικά. Μόνον όταν καταγράφηκαν κάποια αντίγραφα υπολογισμών, δηλαδή, όταν υπήρξε κάποια αναπαράσταση των αριθμών μπορεί να ειπωθεί ότι άρχισαν τα μαθηματικά.

Στην Βαβυλωνία τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν από το 2000 π.Χ. Νωρίτερα, αναπτύχθηκε ένα σύστημα αρίθμησης, κατά τη διάρκεια μίας μακράς περιόδου, με βάση το 60. Επέτρεψε να αναπαρασταθούν οσοδήποτε μεγάλοι αριθμοί και κλάσματα και έτσι κατέδειξε την ύπαρξη μίας ισχυρότατης ανάπτυξης των μαθηματικών.

Τουλάχιστον από το 1700 π.Χ. μελετήθηκαν αριθμητικά προβλήματα, όπως οι Πυθαγόρειες τριάδες : $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$. Στο πλαίσιο της επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων μελετήθηκαν συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Επίσης, μελετήθηκαν δευτεροβάθμιες εξισώσεις και αυτά τα παραδείγματα οδήγησαν σε μία μορφή αριθμητικής άλγεβρας.

Γεωμετρικά προβλήματα σχετικά με όμοια σχήματα, εμβαδά και όγκους μελετήθηκαν επίσης και δόθηκαν τιμές για το π .

Η βάση των μαθηματικών των Βαβυλωνίων κληρονομήθηκε από τους Έλληνες και ανεξάρτητη ανάπτυξη από τους Έλληνες άρχισε περί το 450 π.Χ. Τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη οδήγησαν στην ατομική θεωρία του Δημόκριτου. Μία πιο ακριβής διαμόρφωση των εννοιών ανήγαγε την αντίληψη ότι οι ρητοί αριθμοί δεν ήταν αρκετοί για τη μέτρηση όλων των μηκών. Έτσι, ανήλθε μία γεωμετρική διαμόρφωση των άρρητων αριθμών. Ακόμα, μελέτες των εμβαδών ανέπτυξαν μία μορφή ολοκλήρωσης.

Η θεωρία των κωνικών τομών καταδεικνύει ένα υψηλό επίπεδο μελέτης των καθαρών μαθηματικών από τον Απολλώνιο. Περαιτέρω γεωμετρικές ανακαλύψεις εκπήγασαν από την αστρονομία, όπως για παράδειγμα η τριγωνομετρία.

Η μέγιστη πρόοδος των μαθηματικών από τους Έλληνες υπήρξε από το 300 έως το 200 π.Χ. Μετά από αυτήν την περίοδο η πρόοδος συνεχίστηκε στις ισλαμικές χώρες. Συγκεκριμένα, τα μαθηματικά ήκμασαν στο Ιράν, την Συρία και την Ινδία. Αυτή η εργασία δεν έμοιαζε με την πρόοδο των Ελλήνων στα μαθηματικά, αλλά επιπρόσθετα με την Ισλαμική ανάπτυξη, διατήρησε και τα Ελληνικά μαθηματικά. Περίπου, από τον 11^ο αιώνα ο Adelard of Bath, αργότερα ο Fibonacci, έφεραν τα ισλαμικά μαθηματικά και τις γνώσεις τους για τα Ελληνικά μαθηματικά πίσω στην Ευρώπη.

Η μέγιστη πρόοδος των μαθηματικών στην Ευρώπη ξανάρχισε στις αρχές του 16^{ου} αιώνα με τους Pacioli, Cardan, Tartaglia, Ferrari, με την αλγεβρική επίλυση τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Οι Copernicus και Galileo επαναστάτησαν τις εφαρμογές των μαθηματικών στη μελέτη του σύμπαντος.

Η πρόοδος στην άλγεβρα είχε σημαντικότερη ψυχολογική επίδραση στον ενθουσιασμό για τη μαθηματική έρευνα, συγκεκριμένα στην άλγεβρα, διαχεομένης από την Ιταλία, στον Steven στο Βέλγιο και τον Viete στη Γαλλία.

Ο 17^{ος} αιώνας αντίκρισε τους Napier και Briggs, αλλά και άλλους να επεκτείνουν σημαντικά την υπολογιστική δύναμη των μαθηματικών με την ανακάλυψη των λογαρίθμων. Ο Cavalieri έκανε σημαντική πρόοδο για τον απειροστικό λογισμό και ο Descartes προσέθεσε τη δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων στη Γεωμετρία.

Η πρόοδος του απειροστικού λογισμού συνεχίστηκε από τον Fermat, ο οποίος, μαζί με τον Pascal, άρχισε τη μαθηματική μελέτη των πιθανοτήτων. Παραταύτα, ο

λογισμός παρέμεινε το σημαντικότερο θέμα ανάπτυξης των μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα.

Ο Newton, χτίζοντας επί των εργασιών πρεσβυτέρων του μαθηματικών, όπως ο καθηγητής του Barrow, ανέπτυξε το λογισμό ως εργαλείο εκσυγχρονισμού της μελέτης της φυσικής. Οι εργασίες του περιέχουν ένα πλήθος νέων ανακαλύψεων, καταδεικνύοντας την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών, φυσικής και αστρονομίας. Έτσι, η θεωρία της βαρύτητας του Newton, καθώς επίσης και η θεωρία του περί του φωτός, μας οδηγούν στον 18^ο αιώνα.

Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε και τον Leibniz, του οποίου, η πολύ περισσότερο ακριβής προσέγγιση του λογισμού - αν και όχι ικανοποιητική ακόμα - έθεσε τις βάσεις για την μαθηματική εργασία του 18^{ου} αιώνα, πολύ περισσότερο από εκείνη του Newton. Η επιρροή του Leibniz στα διάφορα μέλη της οικογένειας Bernoulli υπήρξε σημαντικότερη από την άποψη την μεγέθυνσης του λογισμού σε δύναμη και ποικιλία εφαρμογών.

Ο σημαντικότερος μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα ήταν ο Euler, ο οποίος επιπροσθέτως της δουλειάς του σε ένα εύρος μαθηματικών περιοχών, ανακάλυψε δύο νέους κλάδους, εκείνους του λογισμού των μεταβολών και της διαφορικής γεωμετρίας. Ο Euler υπήρξε επίσης σημαντικός στην επιπλέον ανάπτυξη της έρευνας στη θεωρία αριθμών, η οποία είχε αρχίσει από τον Fermat.

Προς το τέλος του 18^{ου} αιώνα, ο Lagrange ξεκίνησε μία αυστηρή θεωρία για τις συναρτήσεις και τη μηχανική. Στο μεταίχμιο, μεταξύ των δύο αιώνων, ο Laplace εμφάνισε σημαντική εργασία στη μηχανική των ουρανίων σωμάτων, αλλά επίσης και οι Monge και Carnot συνετέλεσαν στην ουσιαστική πρόοδο της συνθετικής γεωμετρίας.

Η εξέλιξη κατά τον 19^ο αιώνα υπήρξε ταχεία. Θεμελιώδους σημασίας ήταν η εργασία του Fourier περί της θερμότητας. Στη γεωμετρία ο Plucker παρήγαγε ουσιαστική δουλειά στην αναλυτική γεωμετρία και ο Steiner στη συνθετική γεωμετρία.

Μη ευκλείδειες γεωμετρίες, οι οποίες αναπτύχθηκαν από τους Lobachevsky και Bolyai οδήγησαν στο χαρακτηρισμό της γεωμετρίας από τον Riemann. Ο Gauss, θεωρούμενος από πολλούς ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών, έκανε σημαντικότερες μελέτες. Μεταξύ αυτών, η εργασία του στη διαφορική γεωμετρία, η οποία ήταν επαναστατική για αυτόν τον τομέα. Επίσης, συνέβαλε κατά μεγαλειώδη τρόπο στην αστρονομία και το μαγνητισμό.

Ο 19^{ος} αιώνας ανέδειξε την εργασία του Galois στις εξισώσεις και τη διορατικότητά του στο μονοπάτι που τα μαθηματικά θα ακολουθούσαν στη μελέτη των θεμελιωδών πράξεων. Η εισαγωγή της έννοιας της ομάδας από τον Galois προανήγγειλε τη νέα κατεύθυνση της μαθηματικής έρευνας, η οποία συνεχίστηκε κατά τη διάρκεια του 20^{ού} αιώνα.

Ο Cauchy, εκμεταλλευόμενος την εργασία του Lagrange επί των συναρτήσεων, ξεκίνησε αυστηρή ανάλυση και τη θεωρία των συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής. Αυτή η εργασία θα συνεχιζόταν από τους Weierstrass και Riemann.

Η αλγεβρική γεωμετρία αναπτύχθηκε από τον Cayley, του οποίου η εργασία στους πίνακες και τη γραμμική άλγεβρα, συμπλήρωσε τις προσπάθειες των Hamilton και Grassmann. Το τέλος του 19^{ου} αιώνα βρήκε τον Cantor να ανακαλύπτει, σχεδόν μόνος του, τη θεωρία συνόλων, ενώ η ανάλυσή του της έννοιας του αριθμού προσήψε ουσιαστικά στη μεγαλειώδη δουλειά επί του θέματος από τους Dedekind και Weierstrass στους άρρητους αριθμούς.

Η ανάλυση οδηγήθηκε από τις απαιτήσεις της μαθηματικής φυσικής και της αστρονομίας. Η εργασία του Lie στις διαφορικές εξισώσεις διαφώτισε τη μελέτη των

τοπολογικών ομάδων και της διαφορικής τοπολογίας, ενώ ο Maxwell ήταν εκείνος, ο οποίος εξήρε τις εφαρμογές της ανάλυσης στη μαθηματική φυσική. Επίσης, οι Maxwell, Boltzmann και Gibbs ανέπτυξαν τη στατιστική μηχανική, η οποία οδήγησε στην εργοδική μηχανική.

Η μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων καθοδηγήθηκε από τη μελέτη της ηλεκτροστατικής και της θεωρίας δυναμικού. Η εργασία του Fredholm οδήγησε στον Hilbert και την ανάπτυξη της συναρτησιακής ανάλυσης.

Συμβολισμός και επικοινωνία

Υπάρχουν πολλές μαθηματικές ανακαλύψεις, αλλά μόνον εκείνες, οι οποίες δύνανται να γίνουν κατανοητές από τους άλλους οδηγούν στην πρόοδο. Παραταύτα, η εύκολη χρήση και η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών εξαρτάται από το συμβολισμό τους.

Για παράδειγμα, η εργασία με αριθμούς σαφέστατα παρακωλύεται από το φτωχό συμβολισμό. Προσπαθήστε να πολλαπλασιάσετε δύο αριθμούς, χρησιμοποιώντας λατινικούς χαρακτήρες. Ποιο είναι το γινόμενο του MLXXXIV επί τον MMLLLXIX ; Φυσικά, η πρόσθεση είναι διαφορετικό ζήτημα και στην περίπτωση των λατινικών αριθμών απλή και οι έμποροι, οι οποίοι έκαναν περισσότερους αριθμητικούς υπολογισμούς με πρόσθεση εμφανίζονταν απρόθυμοι να εγκαταλείψουν τη χρήση των λατινικών αριθμών.

Υπάρχουν βεβαίως και άλλα παραδείγματα προβλημάτων συμβολισμού. Ίσως, το γνωστότερο από αυτά είναι ο συμβολισμός για τον απειροστικό λογισμό, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε από τους Leibniz και Newton. Ο συμβολισμός του πρώτου οδηγούσε ευκολότερα στην εξαγωγή των ιδεών του απειροστικού λογισμού, ενώ ο συμβολισμός του Newton, αν και ήταν καλός για την περιγραφή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, είχε πολύ μικρότερη δύναμη, όταν θεωρούνταν συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Οι Βρετανοί μαθηματικοί, οι οποίοι - εθνικιστικά - χρησιμοποιούσαν το συμβολισμό του Newton είχαν σοβαρό μειονέκτημα σε σχέση με τους μαθηματικούς, οι οποίοι ακολούθησαν τον Leibniz.

Ας σκεφτούμε όμως για λίγο πόσο εξαρτόμαστε όλοι από το μαθηματικό συμβολισμό και τις μαθηματικές συμβάσεις. Ας ζητηθεί από οιονδήποτε μαθηματικό να λύσει την εξίσωση $\alpha\chi = \beta$, τότε θα απαντήσει $\chi = \beta/\alpha$. Θα ήταν μεγάλη έκπληξη, αν έδινε την απάντηση $\alpha = \beta/\chi$. Χρησιμοποιούμε συχνά, ακόμα και χωρίς να το αντιλαμβανόμαστε, τη σύμβαση ότι τα γράμματα προς το τέλος της αλφαβήτου αναπαριστούν τους αγνώστους, ενώ εκείνα κοντά στην αρχή γνωστές ποσότητες. Όμως αυτό δε συνέβαινε πάντοτε. Ο Harriot χρησιμοποιούσε το a ως άγνωστο, όπως έκαναν και άλλοι στην εποχή του. Η σύμβαση, την οποία χρησιμοποιούμε για αυτό το θέμα εισήχθη από τον Descartes το 1637. Άλλες συμβάσεις κατέληξαν σε αχρησία, όπως αυτή του Viète, ο οποίος χρησιμοποιούσε φωνήεντα για τους αγνώστους και σύμφωνα για τους γνωστούς.

Φυσικά η $\alpha\chi = \beta$ περιέχει και άλλες συμβάσεις, τις οποίες χρησιμοποιούμε χωρίς ιδιαίτερη μνεία. Για παράδειγμα το σύμβολο της ισότητας $=$, το οποίο εισήχθη από τον Recorde το 1557. Επίσης, το $\alpha\chi$ συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό του a με το χ , ο οποίος είναι ο πιο βολικός συμβολισμός, αφού δεν είναι αναγκαίο να γραφτεί τίποτα απολύτως.

Ευφυείς ανακαλύψεις ;

Είναι αρκετά δύσκολο να κατανοήσουμε την οξυδέρκεια ορισμένων μεγαλειωδών ανακαλύψεων στα μαθηματικά. Από τη μία συχνά εμφανίζονται ως απομονωμένες εκλάμψεις ευφυΐας, αν και στην πραγματικότητα αποτελούν το μεσουράνημα της εργασίας πολλών, συχνά λιγότερο ικανών, μαθηματικών κατά τη διάρκεια μίας μακράς χρονικής περιόδου.

Για παράδειγμα η αντιδικία μεταξύ Newton και Leibniz για το ποιος ανακάλυψε πρώτος τον απειροστικό λογισμό δύναται εύκολα να απαντηθεί. Κανείς από τους δύο, αφού ο Newton διδάχθηκε τον απειροστικό λογισμό από τον καθηγητή του Barrow. Φυσικά, δεν ήταν ο Barrow εκείνος, ο οποίος ανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό, αλλά πρόκειται για αντικείμενο το οποίο αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια μίας μεγάλης χρονικής περιόδου, η οποία ξεκινά από τους Έλληνες.

Βέβαια, τώρα κινδυνεύουμε να μειώσουμε σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις στην τύχη αυτού, ο οποίος εργάστηκε την κατάλληλη στιγμή επί του θέματος. Αυτό θα ήταν επίσης εντελώς άδικο, αν και δίνει εξήγηση για το πώς συμβαίνει ορισμένες φορές δύο ή περισσότεροι μαθηματικοί να ανακαλύπτουν το ίδιο πράγμα ταυτόχρονα, αλλά εντελώς ανεξάρτητα. Ενέχεται ακόμα η έκλαμψη της ιδιοφυΐας στις ανακαλύψεις, η οποία συχνά έγκειται στην βαθύτερη κατανόηση κάποιων εννοιών ή στη διόραση της σπουδαιότητας κάποιων ιδεών πιο καθαρά.

Πώς βλέπουμε την ιστορία

Βλέπουμε την ιστορία των μαθηματικών με τη δική μας φιλοσοφία. Δεν μπορεί να υπάρξει άλλος τρόπος, αλλά δυστυχώς οφείλουμε να προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τη διαφορά μεταξύ της δικής μας άποψης και εκείνης των μαθηματικών που έζησαν κάποιους αιώνες ωρίτερα.

Δεν υπάρχει κανένας λόγος, γιατί κάποιος θα έπρεπε να εισάγει τους αρνητικούς αριθμούς απλά ως λύσεις εξισώσεων, όπως η $x + 3 = 0$. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανένας πραγματικός λόγος του γιατί θα έπρεπε να εισαχθούν οι αρνητικοί αριθμοί. Κανένας δεν κατέχει - 2 βιβλία. Μπορούμε να θεωρήσουμε το 2 ως κάποια αφηρημένη ιδιότητα ενός συνόλου δύο αντικειμένων, το οποίο αποτελεί μία βαθιά ιδέα. Οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν αυτό το είδος πραγματικής αναπαράστασης επί του οποίου μπορούμε να δημιουργήσουμε την αφαίρεση. Δεν αποτελεί έκπληξη ότι η εισαγωγή τους έγινε έπειτα από μεγάλη προσπάθεια. Η κατανόηση αυτής της δυσκολίας θα ωφελούσε οποιονδήποτε δάσκαλο του δημοτικού. Ακόμα και οι ακέραιοι, τους οποίους θεωρούμε τη βασικότερη έννοια, κρύβουν μία φιλοσοφία, την οποία μπορούμε να καταλάβουμε κατάλληλα, εξετάζοντας την ιστορία τους.

Μία πρόκληση

Εάν πιστεύει κάποιος ότι η μαθηματική ανακάλυψη είναι εύκολη, τότε υπάρχει η εξής πρόκληση, την οποία μπορεί να σκεφτεί. Ο Napier, ο Briggs και άλλοι εισήγαγαν τους λογάριθμους εδώ και 400 χρόνια περίπου. Αυτοί χρησιμοποιούνταν ως κύριο εργαλείο στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Ένας εκπληκτικός όγκος προσπάθειας εξοικονομήθηκε με τη χρήση των λογαρίθμων, άρα πώς θα μπορούσαν να γίνουν οι απαραίτητοι δύσκολοι υπολογισμοί των επιστημών χωρίς αυτούς;

Αργότερα, όμως εμφανίστηκε ο υπολογιστής τσέπης. Ο λογάριθμός παραμένει ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο, αλλά η χρήση του στους υπολογισμούς σταμάτησε για πάντα.

Εδώ είναι η πρόκληση. Τι θα αντικαταστήσει τον υπολογιστή ; Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτό είναι άδικο ερώτηση. Εντούτοις, ας υπενθυμίσω ότι ο Napier ανακάλυψε τις βασικές έννοιες ενός μηχανικού υπολογιστή την ίδια περίοδο με τους λογαρίθμους. Οι βασικές ιδέες, οι οποίες θα αντικαταστήσουν τον υπολογιστή βρίσκονται σχεδόν τριγύρω μας.

Μπορούμε να φανταστούμε μικρότερους, γρηγορότερους και γενικά καλύτερους υπολογιστές, αλλά εννοώ κάτι το διαφορετικό από τον υπολογιστή. Ας το σκεφτούμε και ας αντιληφθούμε στη συνέχεια πόσο δύσκολο ήταν να ανακαλυφθούν οι μη - ευκλείδειες γεωμετρίες, οι ομάδες, η γενική σχετικότητα, η θεωρία συνόλων και τόσες άλλες έννοιες.