

Τα μαθηματικά και η σχέση τους με τις άλλες επιστήμες (1)

Η συμμεταβολή των μαθηματικών και των άλλων επιστημών : Τα μαθηματικά ως επιστήμη είναι η δημιουργία εκείνη των αρχαίων Ελλήνων¹, η οποία συντελέστηκε με τη συνεισφορά των εξής παραγόντων, που υπήρξαν στην αρχαία Ελλάδα : α) η *ιδιαιτέρα ανεπτυγμένη φιλοσοφική δραστηριότητα* και β) το *ελεύθερο πνεύμα*. Βεβαίως, τα δύο παραπάνω θα μπορούσαν να συνοψιστούν στην ύπαρξη του υψηλού πολιτιστικού επιπέδου γενικότερα.

Με τον όρο *φιλοσοφική δραστηριότητα* εννοείται εδώ, ολόκληρο εκείνο το πολιτιστικό πλέγμα, που μπορεί να αναπτυχθεί σε μία ομάδα ανθρώπων - ακόμα και σε εμβρυακή κατάσταση αρχικά -, ένα συνοθύλευμα ιδεών και πρωτοβουλιών μεταξύ των ανθρώπων, με λίγα λόγια η κοινωνική συνένωση και παιδεία. Υπό αυτήν την έννοια ανταλλάσσονται απόψεις και απορίες - αυτές οι τελευταίες στη μορφή προβλημάτων διαβίωσης ίσως- και έτσι γίνεται η αναγωγή τους στην αρχέτυπη ιδέα του ανθρώπου : τη ζωή, αλλά αυτή τη φορά το άτομο είναι σε θέση να συγκρίνει και άρα να διαπιστώσει, οπότε να διαμορφώσει μία καθολικότερη λογική, μέσω της αναγκαιότητας η οποία διαφαίνεται όχι μόνο για υλική ανεξαρτητοποίηση, αλλά και για πνευματική επιμόρφωση².

Ιδιαίτερος, ο παράγων α) εμπεριέχει τη λογική (ή συνιστά στη διεύρυνσή της καλύτερα) , η οποία είναι βασικό συστατικό για την περαιτέρω ανάπτυξη της εποπτείας . Η λογική εμπλέκεται εδώ με την έννοια ότι η πνευματική επιμόρφωση οδηγεί στην αιτίαση, η οποία με τη σειρά της απαιτεί την καθολικότερη διαμόρφωση μίας βάσης εξαγωγής αποφάσεων, ήτοι λογικής.

Η εποπτεία, αναφέρεται με την έννοια, ότι συντείνει στη σύλληψη νέων ιδεών. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να συμπεριλάβει κανείς στην εποπτεία, αυτό που ονομάζεται *προβλήματα τεχνικής φύσης*, τα οποία και όσον αφορά στη γεωμετρία πρώτοι οι Αιγύπτιοι τα αντιμετώπισαν και επίλυσαν με συγκεκριμένες, σταθερές διεργασίες. Μέσα από αυτά, με την εμπειρία ή με το νου μπορούν να δοθούν απαντήσεις, οι οποίες μετά θα σταχυολογηθούν και θα τοποθετηθούν σε ένα πρωτόγονο θεωρητικό πλαίσιο - αυτό που ονομάζουμε *θεωρητική βάση* σήμερα -, δηλαδή η ανάγκη για την επίλυση κάποιων προβλημάτων διαβίωσης, κατά κύριο λόγο, ήταν αυτή, η οποία διάνοιξε το δρόμο για τις επιστήμες.

Και τα δύο αυτά μαζί μπορούν να συστήσουν μια καλή βάση για την ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής, δηλαδή της λογικής της απόδειξης. Η μεν εποπτεία « συστείνει » μεθόδους, η δε λογική συντείνει στην ανάπτυξη πάγιων διαδικασιών, οι οποίες προκύπτουν μέσα από τις παραπάνω μεθόδους.

¹ Βέβαια τα μαθηματικά, ή πιο συγκεκριμένα η γεωμετρία, σύμφωνα και με πολλές μαρτυρίες, όπως του Ηροδότου, του Ήρωνα εξ Αλεξανδρείας (πατέρας της γεωδαισίας) και πολλών άλλων αποτελούν δημιουργήματα των Αιγυπτίων στην « τεχνική » μορφή τους - σε εισαγωγικά, διότι κατ' ουσίαν είναι λανθασμένο να διαχωρίζουμε, όπως θα επισημανθεί και παρακάτω την αξία χρήσης, η οποία προσδίδεται στις επιστήμες, αλλά βέβαια είναι δις λάθος και να υποβιβάζονται οι τελευταίες μόνον σ' αυτήν . Κατά τον Ε. Σταμάτη η δημιουργία της γεωμετρίας, ως επιστήμης για την έρευνα των ιδιοτήτων του χώρου είναι αποκλειστικό έργο του Ελληνικού πνεύματος και ανάγεται κατά πρώτο λόγο στον Θαλή το Μιλήσιο.

² Όταν, βέβαια, μία κοινωνία απολέσει την απαραίτητη ισορροπία μεταξύ αυτών των δύο αναγκών, άρα έχει εμπέσει στην υλική εξάρτηση και την πνευματική ανομοιομορφία, τότε επιστρέφει σε πρωτόγονες διαβαθμίσεις πολιτισμού. Ιδιαίτερα, μάλιστα, όταν είναι επιστημονικά αποδεδειγμένο ότι μία τέτοια κατάσταση συμβαίνει για μία πιο έμπειρη (κατά το πιο έξυπνη) κοινωνία το επερχόμενο τέλμα μπορεί να είναι φρικτό ή ακόμα και να αποβεί μοιραίο. Χωρίς να φανώ απαισιόδοξος, ένα τέτοιο πολιτιστικό διάκενο θα συνεισφέρει ουσιαστικά στην καταστροφή της ανθρωπότητας.

Φυσικά, το ελεύθερο πνεύμα υπήρξε διάχυτο (σε κάποιο ποσοστό του τότε πληθυσμού³) και με βάση αυτό γίνεται δυνατή αφενός η δημιουργία νέων μαθηματικών θεωριών -μαζί με την εποπτεία και την εμπειρία σε πρώτο στάδιο - και, αφετέρου οδηγεί στην ανάπτυξη μίας « επιστημονικής περιέργειας », δηλαδή αναζητούνται πλέον και τα αίτια για το πώς συμβαίνουν κάποια πράγματα και άρα αιτούνται απόδειξης, βασισμένης πάνω σε κάποια θεωρία - λογική(μαθηματική).

Τελικά, εξαρχής της θεμελίωσης των μαθηματικών ως επιστήμης από τους Έλληνες μπορούμε να θεωρήσουμε δεδομένη την αυστηρότητά τους και αδιαμφισβήτητη την αξιοπιστία τους⁴, όσον αφορά στην επίλυση ακόμα και προβλημάτων, τα οποία άπτονται της καθημερινής ζωής (εδώ βεβαίως υπεισέρχεται και η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου). Αυτό φυσικά συμβαίνει όσο η εμπειρία επιβεβαιώνει την ορθότητα των πραγμάτων. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, όλες οι επιστήμες αργότερα θεωρείται ότι « ενηλικιώνονται », όταν πλέον έχουν θεμελιωθεί με τη βοήθεια κάποιας μαθηματικής θεωρίας⁵. Η συνέχεια από εκεί και πέρα είναι δυνατόν να θεωρηθεί «κοινή» για κάθε τέτοια επιστήμη και για τα μαθηματικά. Διότι, περαιτέρω, έχουμε μια διαρκή αλληλεπίδραση των μαθηματικών και των άλλων επιστημών. Έτσι, η μία συντελεί στην διαρκή εξέλιξη και ανάπτυξη της άλλης. Έτσι, για παράδειγμα, αρκετές φορές η φυσική και η ανάγκη επίλυσης κάποιου προβλήματός της έχουν συντείνει στην ανάπτυξη - μετεξέλιξη κάποιας υπάρχουσας μαθηματικής θεωρίας. Βέβαια, η αντίστροφη σχέση είναι προφανής, αφού η εξέλιξη των μαθηματικών και η ανάπτυξη θεωριών σε καθαρά αφηρημένο επίπεδο δίνει τη δυνατότητα στις υπόλοιπες επιστήμες για τη δημιουργία και επίλυση νέων μοντέλων για κάποιο πρόβλημα, τα οποία βεβαίως προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματική κατάσταση. Τελικά, λοιπόν, δυνάμεθα να μιλάμε πλέον για κάποιου είδους συμμεταβολή - συνεξέλιξη των επιστημών γενικά (θα έλεγε κανείς μάλιστα συνεξέλιξη με βάση τα μαθηματικά).

³ Διότι, κατά τους κατακριτές της *Ιόνιας δημοκρατίας*, - θα μπορούσαμε να ενστερνιστούμε κατά ένα μέρος, την άποψη της ύπαρξης μιας *δημοκρατίας των ολίγων*, αναφερόμενοι όχι ποσοτικά, αλλά ποιοτικά. Δηλαδή, από όλους τους ανθρώπους, *πολίτες* θεωρούνταν μόνο ένα μέρος αυτών (αποκλείονταν οι δούλοι και οι μέτοικοι, ως γνωστόν), αλλά εγώ θα συνεπλήρωνα ακόμα ότι από αυτούς τους πολίτες μάλλον μικρό μέρος τους είχε την κριτική ικανότητα, η οποία απορρέει από τη μόρφωση, την οξυδερκεία και την κοινωνική παιδεία, ώστε να αποφασίσει αυτό που πραγματικά θα ήθελε (κάτι το οποίο εξάλλου συμβαίνει και σήμερα), δηλαδή ένας δημοκρατικός τρόπος υπένταξης και υποταγής των πολιτών σε διάφορες καθοδηγούμενες απόψεις, γύρω από οποιοδήποτε θέμα ίσως. Σαφέστατα, βεβαίως αυτή η μορφή της δημοκρατίας υπήρξε η καλύτερη δυνατή μέχρι στιγμής, όπως τα γεγονότα αποδεικνύουν, αλλά αυτό δεν είναι το θέμα μας στο παρόν.

⁴ Στο μέτρο που τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται είναι κάθε φορά αποδεκτά για την επίλυση προβλημάτων, τα οποία αφορούν στην αξία χρήσης των θεωρητικών προτύπων που έχουν συσταθεί τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Τα μαθηματικά (όπως και όλες οι άλλες επιστήμες, οι οποίες στηρίζονται σε κάποια λογική) ουδέποτε υπήρξαν ή θα υπάρξουν πλήρη - με την έννοια ότι κάποια στιγμή δε θα οδηγήσουν σε κάποιου είδους αδιέξοδο. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί ποτέ, εφόσον οι εμπειρίες του ανθρώπου και η εγκεφαλική διαβάθμιση του ατόμου αλλάζει. Αυτό συνεπάγεται αναγκαστικά, όχι την αλλαγή βάσης της ανθρώπινης λογικής, αλλά την μετεξέλιξή της και τη συμπλήρωσή της. Ό,τι την παρούσα χρονική στιγμή είναι αποδεκτό ως σωστό, είναι πιθανό μία περαιτέρω ανάπτυξη της ανθρώπινης σκέψης να το θεωρήσει μελλοντικά μερικώς λανθασμένο, κ.ο.κ. Η διαρκής διάσπαση των επιστημών συνεπικουρεί σημαντικά σε αυτήν την μετεξέλιξη. Έτσι, κάποια στιγμή είτε θα επέλθει πλήρης κατακερματισμός των επιστημών με επακόλουθο τη σταθεροποίηση και παγίωσή τους, είτε μία καθολική πνευματική σύγχυση, ως αποτέλεσμα του πληροφοριακού βομβαρδισμού και της ολικής εγκεφαλικής πλήρωσης. Χρήσιμο, αλλά όχι αισιόδοξο, θα ήταν για τον καθένα να σκεφθεί τις συνέπειες από την επικράτηση οιασδήποτε εκ των ανωτέρων καταστάσεων. Εν πάση περιπτώσει, θεωρούμε τα μαθηματικά αξιόπιστα στο μέτρο που οι παρούσες καταστάσεις μας το επιτρέπουν.

⁵ Αναφέρομαι εδώ, σε ό,τι σήμερα ονομάζουμε *θετικές επιστήμες*, σε αυτό το σημείο δεν μπορώ να αναπτυχθώ περαιτέρω στο παρόν (δηλαδή για άτυχη- λανθασμένη κατηγοριοποίηση των επιστημών κλπ.).

Το αποτέλεσμα ως παράγων εξέλιξης των μαθηματικών θεωριών : Πολλοί (μαθηματικοί) συντάσσονται με την άποψη ότι στα « καθήκοντά τους » δεν υφίσταται η πλήρης επίλυση κάποιου προβλήματος. Δηλαδή, η λύση ενός προβλήματος υπαρξιακά και μόνο είναι αρκετή γι' αυτούς : « εμένα με νοιάζει να βρω ότι το πρόβλημα έχει λύση , από εκεί και πέρα είναι θέμα άλλων επιστημόνων η ακριβής επίλυση » , είναι η άποψη που ακούγεται πλειστάκις⁶ . Όμως , θα μπορούσε κανείς να διερωτηθεί, αν, μέσω της πλήρους λύσεως, μπορεί ο μαθηματικός κάποιες φορές να οδηγηθεί σε νέα προβλήματα και περαιτέρω στη σύλληψη κάποιας νέας θεωρίας.

Βεβαίως και είναι δυνατό να συμβεί αυτό : αδιαμφισβήτητο παράδειγμα στην εξέλιξη της θεωρίας αριθμών αποτελεί το Πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή, σύμφωνα με την παραπάνω άποψη , εφόσον ο μαθηματικός μπόρεσε να διαπιστώσει την ύπαρξη λύσεως στο πρόβλημα της εύρεσης της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου από εκεί και πέρα δεν ενδιαφέρεται για το ποια είναι αυτή η λύση. Φυσικά, ακριβώς αυτή η λύση ήταν εκείνη, η οποία οδήγησε στην πρώτη μεγάλη επανάσταση των μαθηματικών με την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και περαιτέρω των αρρήτων αριθμών. Δεν πρέπει να λησμονούμε επίσης ότι τα αποτελέσματα και η τυπικότερη διαπίστωσή τους ήταν αυτό που οδήγησε στη σύσταση των μαθηματικών ως επιστήμης. Συνεπώς, τέτοιες απόλυτες απόψεις δεν είναι δυνατό να είναι πάντα ορθές - βεβαίως γενικότερα ένας μαθηματικός οφείλει να είναι ανοιχτός στην εξέλιξη (τεχνολογική) και να δέχεται ό,τι είναι δυνατόν να συντείνει στην σύλληψη μιας νέας ιδέας (εδώ υπεισέρχονται και οι διάφορες διαβαθμίσεις της αξίας των μαθηματικών βλ. παρατήρηση 6)-. Μάλιστα, είναι στενή η σύνδεση του αποτελέσματος στα μαθηματικά, με την αλληλεπίδρασή τους με τις υπόλοιπες επιστήμες, όπως διαφαίνεται και στην επόμενη παράγραφο.

Τα μαθηματικά μοντέλα : Η ερμηνεία διαφόρων φαινομένων μπορεί αρκετές φορές να είναι απλή και να εξηγείται μέσω πάγιων θεωριών που θεμελιώνονται με την εξέλιξη της επιστήμης , η οποία μελετά τα εν λόγω φαινόμενα. Εντούτοις, η αξία χρήσης μίας επιστήμης (έχει και αυτή κάποια σημασία στην εξέλιξη των κοινωνιών) προσδιορίζεται πολλές φορές από τη δυνατότητα που μπορεί να παρέχει η επιστήμη όσον αφορά στην πρόβλεψη ενός φαινομένου στα όριά της, επί παραδείγματι για κάποιο σεισμό ή για τον καιρό και φυσικά αυτή η αξία χρήσης μίας επιστήμης δεν μπορεί να είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται και αποκτά διαφορετική λειτουργικότητα από εποχή σε εποχή (για παράδειγμα, όταν ο N.Weiner έγραφε για μανθάνουσες μηχανές και αυτοματισμό, η αξία των λεγομένων του ήταν κατανοητή από ένα μικρό

⁶ Εδώ υποκρύπτεται, βεβαίως, ένα γενικότερο ερώτημα που αφορά στο γιατί « εξασκούμε » τα μαθηματικά (ένα σύγχρονο όμορφο βιβλίο, όπου περιγράφονται τα διάφορα αιτιακά επίπεδα μελέτης των μαθηματικών, είναι «η απολογία ενός μαθηματικού» του G. Hardy, έπ' ευκαιρία ένα άλλο αξιόλογο βιβλίο σχετικό με το παρόν είναι «η ισχύς των μαθηματικών» του M.Flato και «η αξία της επιστήμης» του H.Poincare). Ενέχονται, λοιπόν, διάφορες διαβαθμίσεις, οι οποίες με τη σειρά τους υπεισέρχονται σε προσωπικό ή κοινωνικό (καθολικότερο) επίπεδο. Μία ισχυρή τομή και για τα δύο επίπεδα αποτελεί η *ψυχοπαιδευτική αξία* των μαθηματικών. Αφορά εκείνα τα άτομα, τα οποία χαίρονται (εκδήλωση ψυχής) να ερευνούν τα μαθηματικά, να εξασκούν τις νοητικές τους λειτουργίες με αυτά, συνισταμένη των οποίων μπορεί να αποτελεί η ψυχονοητική έκσταση, ώστε αυτά τα άτομα να συνιστούν σε μία καλύτερη κοινωνία. Μία άλλη διαβάθμιση θα μπορούσε να αποτελεί η *αξία χρήσης* των μαθηματικών, η οποία αναφέρεται στο πώς αυτά βοηθούν στην επίλυση σημαντικών προβλημάτων διαβίωσης των ανθρώπων και που αποτέλεσε βέβαια την αρχική προσέγγιση στην αφορμή ανάπτυξής τους. Ταπεινότερες διαβαθμίσεις αποτελούν βεβαίως η *αξία αντί- χρήσης* των μαθηματικών (αυτό αφορά βεβαίως και άλλες επιστήμες), η οποία, γενικά θα λέγαμε, περιέχει οιαδήποτε λειτουργία τους, η οποία συνιστά άμεσα ή έμμεσα στην υποβάθμιση της κοινωνίας. Θα μπορούσε ακόμα να προστεθεί και η - συχνά συναντώμενη - χρήση *ως μέσου προσωπικής προβολής* (δόξα), το οποίο θεωρείται από πολλούς θεμιτό και άλλα πολλά που θα μπορούσε ο καθένας να επισημάνει.

σύνολο ανθρώπων, ενώ τώρα υπάρχει μία σαφέστερη και συνηθέστερη χρήση αυτών των αντικειμένων, άρα η αξία χρήσης τους είναι διευρυμένη και αναβαθμισμένη)

. Στην εποχή μας όταν συζητούμε για πρόβλεψη της εξέλιξης ενός φαινομένου προϋποθέτουμε την ύπαρξη ενός μαθηματικού μοντέλου, το οποίο να προσεγγίζει « ικανοποιητικά » τις διάφορες καταστάσεις του στη διάρκεια του χρόνου. Με αυτόν τον τρόπο καταλαβαίνει κανείς ότι μπορεί να συντελεστεί σε ικανοποιητικό βαθμό η πρόβλεψη βραχυπρόθεσμα ή ακόμα και μακροπρόθεσμα. Δηλαδή, πρόκειται για έναν ακόμα τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται τα μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες.

Βεβαίως η ύπαρξη ενός τέλει τέτοιου μοντέλου που να περιγράφει κάθε φαινόμενο (φυσικό) είναι το πρώτο μέρος του προβλήματος , ενώ κατά δεύτερο λόγο η επίλυσή του σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων (αλγοριθμικά) είναι το επόμενο βήμα .

Η έννοια « τέλει μοντέλο » τοποθετείται στο επίπεδο του ικανοποιητικού, ήτοι του κατά πόσο καλά μπορεί να προσεγγιστεί το φαινόμενο. Γι' αυτόν τον σκοπό η εξέλιξη μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους : είτε με τη συνεξέλιξη μιας μαθηματικής θεωρίας στο πλαίσιο που οριοθετείται από το πρόβλημα, είτε με την ανάπτυξη μίας νέας μαθηματικής θεωρίας σε περισσότερο αφηρημένο επίπεδο, η οποία θα αναδιαμορφωθεί έτσι, ώστε να χρησιμοποιηθεί ως μία καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος. Και για τις δύο διαδρομές έχουμε παραδείγματα, όπως το κλασσικό σύμπλεγμα : μαθηματικών - φυσικής, ή ακόμα : μαθηματικών και πληροφορικής, μαθηματικών - οικονομίας, μαθηματικών - βιολογίας κ.ά.

Η ικανότητα επίλυσης⁷ των μοντέλων είναι το σημαντικότερο πλεονέκτημα μίας τέτοιας χρήσης των μαθηματικών, γι' αυτό εξάλλου και συντελείται μεγάλη προσπάθεια για μία τέτοιου είδους προσέγγιση. Ακόμα, και όταν δεν έχεις πλήρως σωστά αποτελέσματα (και αυτό είναι το σύνηθες) μπορείς να καταφέρεις να γνωρίζεις, έστω και πειραματικά, την απόκλιση του μοντέλου από την πραγματικότητα.

Τελικά, το «κέρδος» από την, όπως παραπάνω περιγράφηκε, συνεξέλιξη των μαθηματικών και των άλλων επιστημών υπήρξε σημαντικό. Αφενός μεν για τα μαθηματικά στην αναδιαμόρφωσή τους και μετεξέλιξή τους με μία αξία χρήσης που τους προσδόθηκε και, κατά κύριο λόγο, με τις «νέες πηγές» έμπνευσης για αυτά με τη μορφή πεδίων καινούργιων αποτελεσμάτων. Αφετέρου, για τις υπόλοιπες επιστήμες, στη διαμόρφωση μίας εγκυρότητας γι' αυτές (στο μέτρο που τα μαθηματικά είναι έγκυρα) και μίας προβλεψιμότητας, υπό τη μορφή αιτίας - αποτελέσματος που επιβάλλεται από τα μαθηματικά μοντέλα (= πρότυπα). Όμως, ως αντιστάθμισμα υπάρχουν, βεβαίως, κάποια μειονεκτήματα, τα οποία αξίζουν επίσης ιδιαίτερης διερεύνησης και ελέγχου.

Σω. Χ.

⁷ Ιδιαίτερος, δε με την ανάπτυξη των υπολογιστών- που και αυτή έγινε επίσης με τη συμβολή των μαθηματικών- είναι σημαντικό να γίνεται αλγοριθμική επίλυση του μοντέλου. Εδώ, πρέπει να επισημανθεί η τριπλή αλληλεπίδραση : πληροφορικής, μαθηματικών και φυσικής. Δηλαδή, πλέον διερχόμεστε από το επίπεδο της απλής μαθηματικών με κάποια άλλη επιστήμη στο επίπεδο μίας πολλαπλής αλληλεπίδρασης. Αυτό δε, παρατηρείται μεταξύ πολλών επιστημών και σ' αυτό το σημείο υπεισέρχεται η διαρκής πολυδιάσπαση των επιστημών, με αποτελέσματα άγνωστα (;).